

LVI олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии
МАТЕМАТИКА, ШКОЛЬНЫЙ ТУР
Таллинн, 7 января 2009 года
XI класс

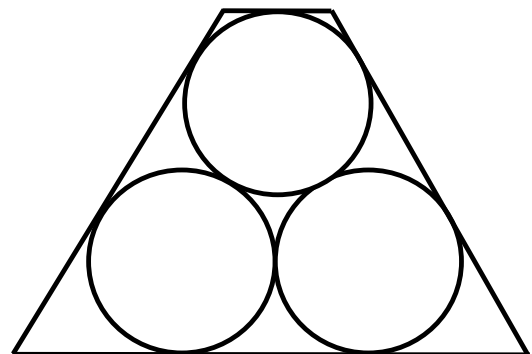
Время, отводимое для решения: 4 часа.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. На неработающем эскалаторе человек передвигается вниз быстрее, чем вверх. Человек должен пройти путь вверх, затем вниз по эскалатору, движущемуся только в одном направлении. В каком случае на путь вверх-вниз человек затрачивает меньше времени: на движущемся вверх эскалаторе или на движущемся вниз эскалаторе? Исходить из того, что:
 - a. все скорости являются постоянными величинами;
 - b. скорости движения эскалатора вверх и вниз одинаковые;
 - c. скорость движения человека в обоих направлениях больше скорости движения эскалатора.
2. Доказать, что при любых действительных значениях переменных x и y справедливо неравенство $x^2 + y^2 \geq xy + x + y - 1$. Определить, при каких значениях переменных x и y справедливо равенство?
3. Найти все такие пары однозначных простых чисел $(m; n)$, где $m > n$, при которых выражение $(m - n)^{2009} - 7$ делится нацело на число 5.

4. В равнобедренную трапецию вписаны три окружности единичного радиуса. Окружности попарно касаются друг друга и стороны трапеции являются касательными к окружностям (см. чертёж). Определи точные значения периметра и площади трапеции.



5. Карлсон подарил Малышу 15 различных самодельных денежных знаков достоинством в 1 карлсон, 2 карлсона, 3 карлсона, 4 карлсона и т.д. до 15 карлсонов. Карлсон хотел, чтобы Малыш упражнялся в сложении и придумал следующую игру: Карлсон выкладывает в ряд по одному денежные знаки в произвольном порядке на стол, и каждый раз, когда самодельная купюра появляется на столе, Малыш должен сказать, какова общая сумма денег на столе. Докажи, что среди сумм, которые произносит Малыш, наибольшее возможное количество сумм, являющихся нечётными числами, равно 11.